9/12/19

• Μελέτη του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] / I$

I ιδεώδες του $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

Θυμάμαι !

Ομάδα πηλίκο: $G/H \overset{op}{=} \{ g * H \;/\; g \in G,\ * \text{ η πράξη της } G \}$

πχ $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{ x + 4\mathbb{Z},\ x \in \mathbb{Z} \} = \{ 0+4\mathbb{Z}, 1+4\mathbb{Z}, 2+4\mathbb{Z}, 3+4\mathbb{Z} \}$

$\mathbb{Z} = \{ \dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \dots \}$

$4\mathbb{Z} = \{ \dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12 \}$

· $x=0$ (πάω στο $4\mathbb{Z}$ και προσθέτω το 0)

: $0 + 4\mathbb{Z} = \{ \dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12 \dots \}$

· $x=1$: $1 + 4\mathbb{Z} = \{ \dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \dots \}$

· $x=2$: $2 + 4\mathbb{Z} = \{ \dots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14 \dots \}$

· $x=3$: $3 + 4\mathbb{Z} = \{ \dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \dots \}$

Σταματάω γιατί έχω όλο το $\mathbb{Z}$!

Για να ορίζεται η ομάδα πηλίκο πρέπει τα αριστερά σύμπλοκα να είναι ίδια με τα δεξιά !

Ορισμός $g_1 + H = g_2 + H \Rightarrow g_1 - g_2 \in H$

$g_1 * H = g_2 * H \Rightarrow g_1 * g_2^{-1} \in H$

Ορίζουμε δακτύλιο πηλίκο R/I

'$+$' $(R/I) \times (R/I) \to (R/I)$

$(r_1 + I) + (r_2 + I) \longmapsto (r_1 + r_2) + I$

'$\cdot$' $(r_1 + I) \cdot (r_2 + I) \longmapsto (r_1 \cdot r_2) + I$

πχ $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$0 + 4\mathbb{Z},\ 1 + 4\mathbb{Z},\ 2 + 4\mathbb{Z},\ 3 + 4\mathbb{Z}$

$(1 + 4\mathbb{Z}) + (2 + 4\mathbb{Z}) = (1 + 2) + 4\mathbb{Z}$

$= 3 + 4\mathbb{Z}$

→ Εύρεση των στοιχείων του

→ Περιγραφή βάσης κ' διάστασης.

Θεώρημα: Έστω $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ και G βάση Gröbner ενός $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Τότε $f + I = g + I \iff N_G(f) = N_G(g)$, όπου $N_G(f)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης f μόδιο G.

$f + I,\ g + I \in \dfrac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{I}$

Απόδειξη

$(\Rightarrow)$ $f + I = g + I \Rightarrow f - g \in I$ (1)

$\left.\begin{array}{l} f - N_G(f) \in I \\ g - N_G(g) \in I \end{array}\right\}$, αφού $N_G(f), N_G(g)$ είναι τα υπόλοιπα των f, g μόδιο της βάσης Gröbner.

$\overset{op}{\Rightarrow} (f - N_G(f)) - (g - N_G(g)) \in I$

$(f - g) + (N_G(g) - N_G(f)) \in I$ (2)

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \underbrace{N_G(f) - N_G(g)}_{\text{ανάγωγο μόδιο } G} \in I \xrightarrow{G} 0 \end{array}\right\}$ $N_G(f) - N_G(g) = 0$

$(\Leftarrow)$ $N_G(f) = N_G(g)$

$f \xrightarrow[+]{G} N_G(f)$ \ $g \xrightarrow[+]{G} N_G(g)$ $\Big\}$ είναι ανάγωγα $\Rightarrow$ $f - N_G(f) \xrightarrow[+]{G} 0$ $\quad$ G β. Gröbner

$g - N_G(g) \xrightarrow[+]{G} 0$

$\left.\begin{array}{l} f - N_G(f) \in I \\ g - N_G(g) \in I \end{array}\right\}$ $f - g \in I \iff f + I = g + I$

Άρα, οι πλευρικές κλάσεις του $\frac{\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]}{I} = \{N_G(f) + I \,/\, G$ βάση Gröbner του $I\}$

Θεώρημα Έστω ο $\mathbb{K}$-διανυσμ. χώρος $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]/I$
Το σύνολο $B = \{x^a + I : x^a \notin in_<(I)\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]/I$.

Απόδειξη Έστω I ιδεώδες του $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$, $<$ μον διάταξη και $G = \{g_1,\dots,g_k\}$ β. Gröbner του I
Αρχικά, θδο το B παράγει τον χώρο. Έστω $f + I \in \frac{\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]}{I}$
Αλλά, $f + I = N_G(f) + I$ $\quad (f \xrightarrow[+]{G} N_G(f))$
Αλλά, το $N_G(f)$ ανάγωγο μόδιο G,
άρα για κάθε απ' τους όρους (δλδ μονώνυμα) του $N_G(f)$ $\nexists$ $lm(g_i)$ να τον διαιρεί.
Άρα, όλα τα μονώνυμα του $N_G(f)$ δεν ανήκουν στο $in_<(I)$.
Άρα $N_G(f) = \lambda_1\mu_1 + \dots + \lambda_s\mu_s \in \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$, $\mu_i \notin in_<(I)$, $\lambda_i \in K$
και γνωρίζω ότι $f + I = N_G(f) + I = (\lambda_1\mu_1 + \dots + \lambda_s\mu_s) + I$

$$= (\lambda_1\mu_1 + I) + \dots + (\lambda_s\mu_s + I)$$

$$= \lambda_1(\mu_1 + I) + \dots + \lambda_s(\mu_s + I)$$

$B = \{x^a + I : x^a \notin in_<(I)\}$
Άρα, το B παράγει το χώρο.

Το $\{\mu_1 + I, \dots, \mu_s + I\}$ Γ.Α. $\mu_i \notin in_<(I)$
Έστω $\lambda_1(\mu_1 + I) + \dots + \lambda_s(\mu_s + I) = 0 + I$, $\lambda_i \in K$

$$\Updownarrow$$

$$(\lambda_1\mu_1 + I) + \dots + (\lambda_s\mu_s + I) = 0 + I$$

$$\Updownarrow$$

$$(\lambda_1\mu_1 + \dots + \lambda_s\mu_s) + I = 0 + I$$

$\lambda_1 s_1 \mu_1 + \dots + \lambda_s s_s \mu_s \in I$ αλλά αφού $\mu_i \notin in_<(I)$ ανάγωγο μόδιο G.

Αλλά, $\lambda_1 s_1 \mu_1 + \dots + \lambda_s s_s \mu_s = 0 \iff \lambda_i = 0$.

Πχ $I = \langle f_1 = yx^2 - 4x,\ f_2 = y^2 + x^2 - 5 \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x,y]$ deglex $y > x$

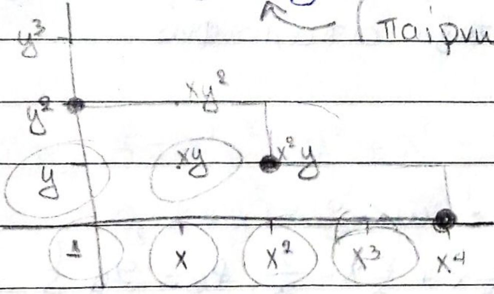
Θα υπολογίσουμε $\dim \frac{\mathbb{Q}[x,y]}{I}$ και πίνακας πολ/μου.

Από Θεωρ. $B = \{x^a + I,$ όπου $x^a \notin in_<(I)\}$

Βάση Gröbner του I: $G = \{\underset{f_1}{yx^2 - 4x}, \underset{f_2}{y^2 + x^2 - 5}, \underset{f_3}{x^4 + 4xy - 5x^2}\}$

Αφού το G β. Gröbner $\iff in_<(G) = in_<(I)$

$in_<(G) = \langle yx^2, y^2, x^4 \rangle = in_<(I)$ (παίρνω τα μον. που δεν ανήκουν)



αυτά δεν ανήκουν.

Παρατηρώ ότι τα $1, x, x^2, x^3, y, xy \notin in_<(I)$

άρα μια βάση του $\mathbb{Q}[x,y]$

$\{1 + I, x + I, x^2 + I, x^3 + I, xy + I, y + I\}$

άρα $\dim \frac{\mathbb{Q}[x,y]}{I} = 6$.

Πίνακας πολ/μού

$\cdot$	$1+I$	$x+I$	x^2+I	x^3+I	$y+I$	$xy+I$
$1+I$						
$x+I$	$x+I$					
x^2+I		x^3+I				
x^3+I					$\cancel{x^3y+I}$ $4x^2+I$	
$y+I$						
$xy+I$						

$(r_1 + I)(r_2 + I) = (r_1 r_2 + I)$

$x^3y \xrightarrow{f_1} x^3y - \frac{x^3y}{yx^2}(yx^2 - 4x) = 4x^2 \to N_G(f)$ $\quad (f + I = N_G(f) + I)$

άρα $x^3y + J = <1x^2 + J$

- Το πρόβλημα τομής δύο ιδεωδών ($I, J \subseteq \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$)
  Περιγραφή $I \cap J$

Θεώρημα: $I \cap J = <\omega I + (1-\omega) J> \cap \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$
όπου ω νέα μεταβλητή που έχουμε εισάγει.

Πχ $I = <x-1, y>$, $J = <x+2, y> \subseteq \mathbb{Q}[x,y]$, lex $x>y$
$I \cap J = ;$

Υπολογίζω το $L = <\omega I, (1-\omega) J> = <\underset{f_1}{\omega(x-1)}, \underset{f_2}{\omega y}, \underset{f_3}{(1-\omega)(x+2)}, \underset{f_4}{(1-\omega)y}>$
Υπολογίζω βάση Grobner του L με διάταξη απαλοιφής
με $\omega > x > y$ με lex

Βάση Grobner: $\{f_1 = \omega x - \omega, f_2 = \omega y, f_3 = -\omega x - 2\omega + x + 2,$
$f_4 = -\omega y + \omega, f_5 = -3\omega + x + 2, f_6 = -xy, f_7 = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}, f_8 = 2y\}$

Άρα, $I \cap J = <-xy, \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}, 2y>$
(Για την τομή, κρατάω μόνο τα x, y και όχι ω)

Θεώρημα: Έστω $I, J \subseteq \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ όπου $J = <f_1,\dots,f_s>$
Τότε, $I : J = \bigcap_{i=1}^{s} I : <f_i>$

όπου $I : <f_i> = \frac{1}{f_i}(I \cap <f_i>)$

Πχ Έστω $I = <\underset{f_1}{x^2}, \underset{f_2}{x+y}>$, $J = <x(x+y)^2, y> \subseteq \mathbb{K}[x,y]$
$J : I = ;$

$J : I = \bigcap_{i=1}^{2} J : <f_i> = (J : <f_1>) \cap (J : <f_2>)$

- $J : <f_1> = \frac{1}{x^2}(J \cap <f_1>)$

$J \cap \langle f_1 \rangle : \quad L = \langle \omega x (x+y)^2, \omega y, (1-\omega) x^2 \rangle$

$\overset{\shortparallel}{\langle x^3, x^2 y \rangle}$

$J : \langle f_1 \rangle = \langle x, y \rangle \quad , \quad J : \langle f_2 \rangle = \langle x^2 - xy + y^2, y \rangle$

$\langle x, y \rangle \cap \langle x^2 - xy + y^2, y \rangle$

$J : J = \langle x^2, y \rangle$

- ΕΚΠ, ΜΚΔ (f, g)

Θεώρημα: Ισχύει: α) $\langle f \rangle \cap \langle g \rangle = \langle ΕΚΠ(f,g) \rangle$

β) $μκδ(f,g) = \dfrac{f \cdot g}{ΕΚΠ(f,g)}$

Πχ $f = x^2 y^2 - y^2 + x^2 - 1$

$g = x y^2 - y^2 - x + 1$

$\langle f \rangle \cap \langle g \rangle : \quad I = \langle \omega f, (1-\omega) g \rangle \xrightarrow{\text{Gröbner}} \{ x^2 y^4 - x^2 - y^4 + 1 \quad \cancel{\ } \}$

$= \langle x^2 y^4 - x^2 - y^4 + 1 \rangle$